Het Vergelijken van Toevalsveranderlijken vanuit een Speltheoretisch Perspectief

Bart De Schuymer

Overzicht

1. Cykeltransitiviteit
   - Probabilistische relatie
   - Transitiviteit
   - Cykeltransitiviteit
2. Vergelijken van toevalsveranderlijken
   - Dobbelsteenmodel
   - Onafhankelijke toevalsveranderlijken
   - Afhankelijke toevalsveranderlijken
3. Dobbelspellen
   - Speldefinitie
   - Optimale strategieën

Overzicht

1. Cykeltransitiviteit
   - Probabilistische relatie
   - Transitiviteit
   - Cykeltransitiviteit
2. Vergelijken van toevalsveranderlijken
   - Dobbelsteenmodel
   - Onafhankelijke toevalsveranderlijken
   - Afhankelijke toevalsveranderlijken
3. Dobbelspellen
   - Speldefinitie
   - Optimale strategieën

Relatie R

- Voorbeeld:

$A = \{$kroegentocht, endeldarm, ijsberg, mysidacea, enkel, nevel, nirvana, avondmaal$\}$

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow \text{“}a \text{ is groter dan } b\text{”}$$

$$(\text{ijsberg,endeldarm}) \in R$$

$$(\text{kroegentocht,ijsberg}) \notin R \wedge (\text{ijsberg,kroegentocht}) \notin R$$

- Boolese representatie:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow R(a, b) = 1,\ (a, b) \notin R \Leftrightarrow R(a, b) = 0$$

Relatie R

- Voorbeeld:

$$A = \{\text{kroegentocht, endeldarm, ijsberg, mysidacea, enkel, nevel, nirvana, avondmaal}\}$$

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow \text{“}a \text{ is groter dan } b\text{”}$$

$$(\text{ijsberg,endeldarm}) \in R$$

$$(\text{kroegentocht,ijsberg}) \notin R \wedge (\text{ijsberg,kroegentocht}) \notin R$$

- Boolese representatie:

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow R(a,b) = 1, \ (a,b) \notin R \Leftrightarrow R(a,b) = 0$$

Relatie R

- Voorbeeld:

$$A = \{\text{kroegentocht, endeldarm, ijsberg, mysidacea, enkel, nevel, nirvana, avondmaal}\}$$

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow \text{“}a \text{ is groter dan } b\text{”}$$

$$(\text{ijsberg,endeldarm}) \in R$$

$$(\text{kroegentocht,ijsberg}) \notin R \wedge (\text{ijsberg,kroegentocht}) \notin R$$

- Boolese representatie:

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow R(a,b) = 1,\ (a,b) \notin R \Leftrightarrow R(a,b) = 0$$

Preferentiestructuur

- Strikte preferentierelatie P:

$$P(a,b) = 1 \Leftrightarrow \text{“}a \text{ wordt geprefereerd over } b\text{”}$$

- Indifferentierelatie I:

$$I(a,b) = 1 \Leftrightarrow \text{“}a \text{ en } b \text{ zijn evenwaardig”}$$

- Onvergelijkbaarheidsrelatie J:

$$J(a,b) = 1 \Leftrightarrow \text{“}a \text{ en } b \text{ zijn onvergelijkbaar”}$$

- Hier:

$$J = \emptyset$$

Preferentiestructuur

- Strikte preferentierelatie P:

$$P(a,b) = 1 \Leftrightarrow \text{“}a \text{ wordt geprefereerd over } b\text{”}$$

- Indifferentierelatie I:

$$I(a,b) = 1 \Leftrightarrow \text{“}a \text{ en } b \text{ zijn evenwaardig”}$$

- Onvergelijkbaarheidsrelatie J:

$$J(a,b) = 1 \Leftrightarrow \text{“}a \text{ en } b \text{ zijn onvergelijkbaar”}$$

- Hier:

$$J = \emptyset$$

Probabilistische relatie Q

- Preferentiestructuur $\rightsquigarrow$ Probabilistische relatie:

$$Q(a,b) = P(a,b) + \tfrac{1}{2}I(a,b)$$

- $Q : A \times A \longrightarrow \{0, 1/2, 1\}$:

$$Q(a,b) = 1 - Q(b,a)$$

- Uitbreiding van $\{0, 1/2, 1\}$ naar $[0, 1]$:

$$Q : A \times A \longrightarrow [0, 1]$$

Voorbeeld

- Twee standaard dobbelstenen A en B:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Preferentiestructuur:

$$P(A, B) = P(B, A) = \frac{15}{36}, \; I(A, B) = I(B, A) = \frac{6}{36}$$
$$\Rightarrow Q(A, B) = \frac{1}{2}$$

- Er geldt:

$$Q(A, B) = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \text{stochastische indifferentie tussen } A \text{ en } B$$
$$(A =_s B)$$

Voorbeeld

- Twee standaard dobbelstenen A en B:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad B = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- Preferentiestructuur:

$$P(A,B) = P(B,A) = \tfrac{15}{36},\ I(A,B) = I(B,A) = \tfrac{6}{36}$$
$$\Rightarrow Q(A,B) = \tfrac{1}{2}$$

- Er geldt:

$$Q(A,B) = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \text{stochastische indifferentie tussen } A \text{ en } B \ (A =_s B)$$

Voorbeeld

- Twee standaard dobbelstenen A en B:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}, \quad B = \{1,2,3,4,5,6\}$$

- Preferentiestructuur:

$$P(A,B) = P(B,A) = \frac{15}{36},\ I(A,B) = I(B,A) = \frac{6}{36}$$
$$\Rightarrow Q(A,B) = \frac{1}{2}$$

- Er geldt:

$Q(A,B) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ stochastische indifferentie tussen A en B
$(A =_s B)$

Voorbeeld

- Twee andere dobbelstenen A en B:

$$A = \{2,2,3,4,5,6\}, \quad B = \{1,2,3,4,5,7\}$$

- Preferentiestructuur:

$$P(A,B) = \frac{16}{36}, P(B,A) = \frac{15}{36}, I(A,B) = I(B,A) = \frac{5}{36}$$
$$\Rightarrow Q(A,B) = \frac{37}{72} > \frac{1}{2}$$

- Er geldt:

$$Q(A,B) > \frac{1}{2} \Rightarrow A \text{ wordt stochastisch geprefereerd over } B$$
$$(A >_s B)$$

Voorbeeld

- Twee andere dobbelstenen A en B:

$$A = \{2,2,3,4,5,6\}, \quad B = \{1,2,3,4,5,7\}$$

- Preferentiestructuur:

$$P(A,B) = \frac{16}{36}, P(B,A) = \frac{15}{36}, I(A,B) = I(B,A) = \frac{5}{36}$$
$$\Rightarrow Q(A,B) = \frac{37}{72} > \frac{1}{2}$$

- Er geldt:

$$Q(A,B) > \frac{1}{2} \Rightarrow A \text{ wordt stochastisch geprefereerd over } B$$
$$(A >_s B)$$

Voorbeeld

- Twee andere dobbelstenen A en B:

$$A = \{2,2,3,4,5,6\}, \quad B = \{1,2,3,4,5,7\}$$

- Preferentiestructuur:

$$P(A,B) = \frac{16}{36}, P(B,A) = \frac{15}{36}, I(A,B) = I(B,A) = \frac{5}{36}$$
$$\Rightarrow Q(A,B) = \frac{37}{72} > \frac{1}{2}$$

- Er geldt:

$Q(A,B) > \frac{1}{2} \Rightarrow A$ wordt stochastisch geprefereerd over B
$(A >_s B)$

Overzicht

1. Cykeltransitiviteit
   - Probabilistische relatie
   - Transitiviteit
   - Cykeltransitiviteit
2. Vergelijken van toevalsveranderlijken
   - Dobbelsteenmodel
   - Onafhankelijke toevalsveranderlijken
   - Afhankelijke toevalsveranderlijken
3. Dobbelspellen
   - Speldefinitie
   - Optimale strategieën

Definitie

- Relationele definitie:

$$((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \Rightarrow (a,c) \in R$$

- Voorbeeld: stel R is de relatie "... is groter dan ..."

(Billy is groter dan Donny $\wedge$ Donny is groter dan Sally) $\Rightarrow$
Billy is groter dan Sally

- Grafische voorstelling:

Definitie

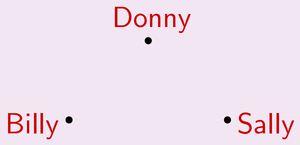
- Relationele definitie:

$$((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \Rightarrow (a,c) \in R$$

- Voorbeeld: stel R is de relatie "... is groter dan ..."

(Billy is groter dan Donny $\wedge$ Donny is groter dan Sally) $\Rightarrow$
Billy is groter dan Sally

- Grafische voorstelling:



Definitie

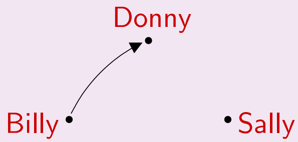
- Relationele definitie:

$$((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \Rightarrow (a,c) \in R$$

- Voorbeeld: stel R is de relatie "… is groter dan …"

(Billy is groter dan Donny $\wedge$ Donny is groter dan Sally) $\Rightarrow$
Billy is groter dan Sally

- Grafische voorstelling:



Definitie

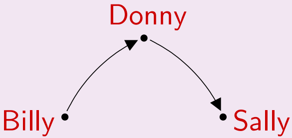
- Relationele definitie:

$$((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \Rightarrow (a,c) \in R$$

- Voorbeeld: stel R is de relatie "… is groter dan …"

(Billy is groter dan Donny $\wedge$ Donny is groter dan Sally) $\Rightarrow$
Billy is groter dan Sally

- Grafische voorstelling:



Definitie

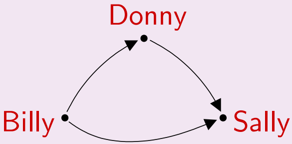
- Relationele definitie:

$$((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R) \Rightarrow (a,c) \in R$$

- Voorbeeld: stel R is de relatie "... is groter dan ..."

(Billy is groter dan Donny ∧ Donny is groter dan Sally) ⇒
Billy is groter dan Sally

- Grafische voorstelling:



Niet-transitieve relaties

- Blad-Steen-Schaar spel:

Blad wint van Steen
Steen wint van Schaar
Schaar wint van Blad

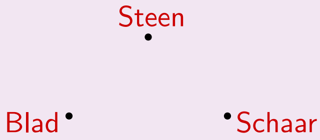
- Grafische voorstelling:

Niet-transitieve relaties

- Blad-Steen-Schaar spel:

Blad wint van Steen
Steen wint van Schaar
Schaar wint van Blad

- Grafische voorstelling:

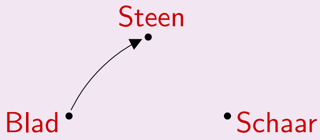


Niet-transitieve relaties

- Blad-Steen-Schaar spel:

Blad wint van Steen
Steen wint van Schaar
Schaar wint van Blad

- Grafische voorstelling:

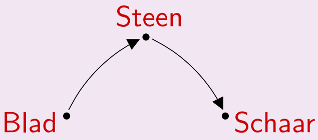


Niet-transitieve relaties

- Blad-Steen-Schaar spel:

Blad wint van Steen
Steen wint van Schaar
Schaar wint van Blad

- Grafische voorstelling:

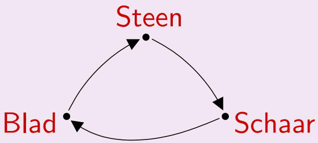


Niet-transitieve relaties

- Blad-Steen-Schaar spel:

Blad wint van Steen
Steen wint van Schaar
Schaar wint van Blad

- Grafische voorstelling:



Niet-transitieve relaties

- Dobbelstenen:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{1,3,4,15,16,17\} \\
A_2 &= \{2,10,11,12,13,14\} \\
A_3 &= \{5,6,7,8,9,18\}
\end{aligned}
$$

$$P(A_1, A_2) = \frac{20}{36}, P(A_2, A_3) = \frac{25}{36}, P(A_3, A_1) = \frac{21}{36}$$

- Grafische voorstelling relatie $\geq_s$:

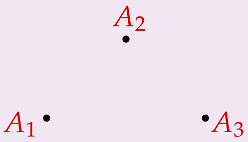
Niet-transitieve relaties

- Dobbelstenen:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1,3,4,15,16,17\} \\ A_2 &= \{2,10,11,12,13,14\} \\ A_3 &= \{5,6,7,8,9,18\} \end{aligned}$$

$$P(A_1,A_2)=\frac{20}{36}, P(A_2,A_3)=\frac{25}{36}, P(A_3,A_1)=\frac{21}{36}$$

- Grafische voorstelling relatie $\geq_s$:



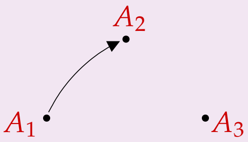
Niet-transitieve relaties

- Dobbelstenen:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{1, 3, 4, 15, 16, 17\} \\
A_2 &= \{2, 10, 11, 12, 13, 14\} \\
A_3 &= \{5, 6, 7, 8, 9, 18\}
\end{aligned}
$$

$$P(A_1, A_2) = \frac{20}{36}, P(A_2, A_3) = \frac{25}{36}, P(A_3, A_1) = \frac{21}{36}$$

- Grafische voorstelling relatie $\geq_s$:



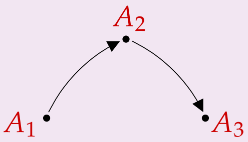
Niet-transitieve relaties

- Dobbelstenen:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{1, 3, 4, 15, 16, 17\} \\
A_2 &= \{2, 10, 11, 12, 13, 14\} \\
A_3 &= \{5, 6, 7, 8, 9, 18\}
\end{aligned}
$$

$$P(A_1, A_2) = \frac{20}{36}, P(A_2, A_3) = \frac{25}{36}, P(A_3, A_1) = \frac{21}{36}$$

- Grafische voorstelling relatie $\geq_s$:



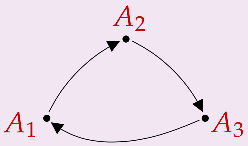
Niet-transitieve relaties

- Dobbelstenen:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{1,3,4,15,16,17\} \\
A_2 &= \{2,10,11,12,13,14\} \\
A_3 &= \{5,6,7,8,9,18\}
\end{aligned}
$$

$$P(A_1,A_2)=\frac{20}{36}, P(A_2,A_3)=\frac{25}{36}, P(A_3,A_1)=\frac{21}{36}$$

- Grafische voorstelling relatie $\geq_s$:



Types transitiviteit

- Notatie: $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ met

$$q_{ij} = Q(A_i, A_j)$$

- $\geq_s$ is transitief $\Leftrightarrow$

$$q_{ij} \geq \frac{1}{2} \wedge q_{jk} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow q_{ik} \geq \frac{1}{2}$$

- Twee belangrijkste klasses:
  - Stochastische transitiviteit
  - T-transitiviteit

Types transitiviteit

- Notatie: $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ met

$$q_{ij} = Q(A_i, A_j)$$

- $\geq_s$ is transitief $\Leftrightarrow$

$$q_{ij} \geq \frac{1}{2} \wedge q_{jk} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow q_{ik} \geq \frac{1}{2}$$

- Twee belangrijkste klasses:
  - Stochastische transitiviteit
  - T-transitiviteit

Types transitiviteit

- Notatie: $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ met

$$q_{ij} = Q(A_i, A_j)$$

- $\geq_s$ is transitief $\Leftrightarrow$

$$q_{ij} \geq \frac{1}{2} \wedge q_{jk} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow q_{ik} \geq \frac{1}{2}$$

- Twee belangrijkste klasses:
  - Stochastische transitiviteit
  - T-transitiviteit

Stochastische transitiviteit

- $Q = [q_{ij}]$ is g-stochastisch transitief, met g een stijgende $[1/2, 1]^2 \to [0, 1]$ functie, indien

$$q_{ij} \geq \frac{1}{2} \wedge q_{jk} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow q_{ik} \geq g(q_{ij}, q_{jk})$$

Stochastische transitiviteit

- Belangrijkste voorbeelden:
  - Zwakke stochastische transitiviteit:
    $g(x,y) = \frac{1}{2}$
  - Matige stochastische transitiviteit:
    $g(x,y) = \min(x,y)$
  - Sterke stochastische transitiviteit:
    $g(x,y) = \max(x,y)$
  - λ-stochastische transitiviteit ($\lambda \in [0,1]$):
    $g(x,y) = \lambda \max(x,y) + (1-\lambda) \min(x,y)$
- Telkens geldt: $\geq_s$ is transitief

Partieel stochastische transitiviteit

- Laat $g :]1/2, 1]^2 \to]1/2, 1]$ commutatief zijn, dan is $Q = [q_{ij}]$ partieel g-stochastisch indien

$$q_{ij} > \frac{1}{2} \wedge q_{jk} > \frac{1}{2} \Rightarrow q_{ik} \geq g(q_{ij}, q_{jk})$$

T-transitiviteit

- t-norm $T : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$:
  - Eenheidselement 1
  - Stijgend in beide leden
  - Commutatief
  - Associatief
- $Q = [q_{ij}]$ is T-transitief indien

$$q_{ik} \geq T(q_{ij}, q_{jk})$$

T-transitiviteit

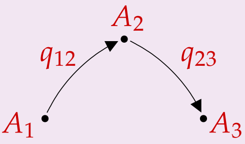
- Enkele voorbeelden:
  - $T_{\mathbf{M}}$-transitiviteit: $T_{\mathbf{M}}(x,y) = \min(x,y)$
  - $T_{\mathbf{P}}$-transitiviteit: $T_{\mathbf{P}}(x,y) = x\,y$
  - $T_{\mathbf{L}}$-transitiviteit: $T_{\mathbf{L}}(x,y) = \max(0, x+y-1)$

Overzicht

1. Cykeltransitiviteit
   - Probabilistische relatie
   - Transitiviteit
   - Cykeltransitiviteit
2. Vergelijken van toevalsveranderlijken
   - Dobbelsteenmodel
   - Onafhankelijke toevalsveranderlijken
   - Afhankelijke toevalsveranderlijken
3. Dobbelspellen
   - Speldefinitie
   - Optimale strategieën

Alternatieve methode

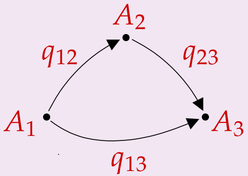
- Klassiek:



- Cykeltransitiviteit:

Alternatieve methode

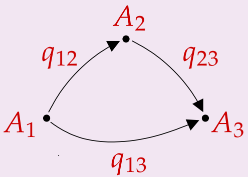
- Klassiek:



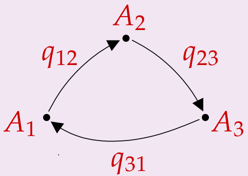
- Cykeltransitiviteit:

Alternatieve methode

- Klassiek:



- Cykeltransitiviteit:



Definities

- Ordening:

$$\alpha_{ijk} = \min(q_{ij}, q_{jk}, q_{ki})$$
$$\beta_{ijk} = \text{mediaan}(q_{ij}, q_{jk}, q_{ki})$$
$$\gamma_{ijk} = \max(q_{ij}, q_{jk}, q_{ki})$$

- $\Delta \subset \mathbb{R}^3$:

$$\Delta = \{(x, y, z) \in [0,1]^3 \mid x \leq y \leq z\}$$

Bovengrensfunctie

- $U : \Delta \to \mathbb{R}$ is een bovengrensfunctie indien
  - $U(0,0,1) \geq 0 \wedge U(0,1,1) \geq 1$
  - $U(\alpha,\beta,\gamma) + U(1-\gamma, 1-\beta, 1-\alpha) \geq 1$
- $U \in \mathcal{U}$
- Duale ondergrensfunctie:

$$L(\alpha,\beta,\gamma) = 1 - U(1-\gamma, 1-\beta, 1-\alpha)$$

Bovengrensfunctie

- $U : \Delta \to \mathbb{R}$ is een bovengrensfunctie indien
  - $U(0,0,1) \geq 0 \wedge U(0,1,1) \geq 1$
  - $U(\alpha,\beta,\gamma) + U(1-\gamma,1-\beta,1-\alpha) \geq 1$
- $U \in \mathcal{U}$
- Duale ondergrensfunctie:

$$L(\alpha,\beta,\gamma) = 1 - U(1-\gamma,1-\beta,1-\alpha)$$

Cykeltransitiviteit

- Een probabilistische relatie Q op A is cykeltransitief m.b.t. de bovengrensfunctie $U \in \mathcal{U}$ indien voor alle $(a,b,c) \in A^3$

$$L(\alpha_{abc}, \beta_{abc}, \gamma_{abc}) \leq \alpha_{abc} + \beta_{abc} + \gamma_{abc} - 1 \leq U(\alpha_{abc}, \beta_{abc}, \gamma_{abc})$$

Of nog, indien voor alle $(a,b,c) \in A^3$

$$\alpha_{abc} + \beta_{abc} + \gamma_{abc} - 1 \leq U(\alpha_{abc}, \beta_{abc}, \gamma_{abc})$$

- . . . Enkele soorten cykeltransitiviteit . . .

Cykeltransitiviteit

- Een probabilistische relatie Q op A is cykeltransitief m.b.t. de bovengrensfunctie $U \in \mathcal{U}$ indien voor alle $(a,b,c) \in A^3$

$$L(\alpha_{abc},\beta_{abc},\gamma_{abc}) \leq \alpha_{abc}+\beta_{abc}+\gamma_{abc}-1 \leq U(\alpha_{abc},\beta_{abc},\gamma_{abc})$$

Of nog, indien voor alle $(a,b,c) \in A^3$

$$\alpha_{abc}+\beta_{abc}+\gamma_{abc}-1 \leq U(\alpha_{abc},\beta_{abc},\gamma_{abc})$$

- ... Enkele soorten cykeltransitiviteit ...

T-transitiviteit

- t-norm T die 1-Lipschitz is:

$$U(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha+\beta-T(\alpha,\beta)$$

- Voorbeelden:

$$\begin{array}{rrcl} T_{\mathbf{M}}\text{-transitiviteit:} & U_{\mathbf{M}}(\alpha,\beta,\gamma) & = & \beta \\ T_{\mathbf{P}}\text{-transitiviteit:} & U_{\mathbf{P}}(\alpha,\beta,\gamma) & = & \alpha+\beta-\alpha\,\beta \\ T_{\mathbf{L}}\text{-transitiviteit:} & U_{\mathbf{L}}(\alpha,\beta,\gamma) & = & 1 \end{array}$$

Stochastische transitiviteit

- $g : [1/2, 1]^2 \to [1/2, 1]$ commutatief en stijgend, met $g(1/2, x) \leq x$:

$$U_g(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} \beta + \gamma - g(\beta, \gamma) & , \ \beta \geq 1/2 \wedge \alpha < 1/2 \\ 1/2 & , \ \alpha \geq 1/2 \\ 2 & , \ \beta < 1/2 \end{cases}$$

Partieel stochastische transitiviteit

- $g:]1/2,1]^2 \to]1/2,1]$ is commutatief:

$$U_g^p(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} \beta+\gamma-g(\beta,\gamma) & , \ \beta > 1/2 \\ 2 & , \ \beta \leq 1/2 \end{cases}$$

Isostochastische transitiviteit

- Laat $g : [1/2, 1]^2 \longrightarrow [1/2, 1]$ commutatief en stijgend zijn, en neutraal element $1/2$ hebben. Een probabilistische relatie is dan g-isostochastisch transitief indien

$$q_{ij} \geq \frac{1}{2} \wedge q_{jk} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow q_{ik} = g(q_{ij}, q_{jk})$$

- Bovengrensfunctie:

$$U_g^s(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} \beta + \gamma - g(\beta, \gamma) & , \ \beta \geq 1/2 \\ \alpha + \beta - 1 + g(1 - \beta, 1 - \alpha) & , \ \beta < 1/2 \end{cases}$$

Overzicht

1. Cykeltransitiviteit
   - Probabilistische relatie
   - Transitiviteit
   - Cykeltransitiviteit
2. Vergelijken van toevalsveranderlijken
   - Dobbelsteenmodel
   - Onafhankelijke toevalsveranderlijken
   - Afhankelijke toevalsveranderlijken
3. Dobbelspellen
   - Speldefinitie
   - Optimale strategieën

Definities

- Collectie van m dobbelstenen:

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_m\},\ \#A_i = n_i$$

- Dobbelsteen A_i met n_i vlakken:

$$A_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_i}\},\ a_j \in \mathbb{N}_0$$

- Preferentierelatie P:

$$P(A_1, A_2) = \mathrm{Prob}\{A_1 > A_2\}$$

- Indifferentierelatie I:

$$I(A_1, A_2) = \mathrm{Prob}\{A_1 = A_2\}$$

Definities

- Collectie van m dobbelstenen:

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_m\},\ \#A_i = n_i$$

- Dobbelsteen A_i met n_i vlakken:

$$A_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_i}\},\ a_j \in \mathbb{N}_0$$

- Preferentierelatie P:

$$P(A_1, A_2) = \text{Prob}\{A_1 > A_2\}$$

- Indifferentierelatie I:

$$I(A_1, A_2) = \text{Prob}\{A_1 = A_2\}$$

Definities

- Probabilistische relatie $Q = [q_{ij}]$:

$$q_{ij} = P(A_i, A_j) + \frac{1}{2} I(A_i, A_j)$$

- Collectie van m dobbelstenen:

m-dimensionaal dobbelsteenmodel

Definities

- Probabilistische relatie $Q = [q_{ij}]$:

$$q_{ij} = P(A_i, A_j) + \frac{1}{2} I(A_i, A_j)$$

- Collectie van m dobbelstenen:

m-dimensionaal dobbelsteenmodel

Transitiviteit van het model

- Karakteristieke transitiviteit voor $n = 3$:

$$(\exists\,(i,j,k) = \pi(1,2,3))(q_{ik} \geq q_{ij}\,q_{jk} \wedge q_{ki} \geq q_{kj}\,q_{ji})$$

  met $\pi(1,2,3)$ een permutatie van $(1,2,3)$

- Bovengrensfunctie:

$$U_D(\alpha,\beta,\gamma) = \beta + \gamma - \beta\gamma$$

- Benaming:

  Dobbeltransitiviteit

Transitiviteit van het model

- Karakteristieke transitiviteit voor $n = 3$:

$$(\exists\,(i,j,k) = \pi(1,2,3))(q_{ik} \geq q_{ij}\,q_{jk} \wedge q_{ki} \geq q_{kj}\,q_{ji})$$

  met $\pi(1,2,3)$ een permutatie van $(1,2,3)$

- Bovengrensfunctie:

$$U_D(\alpha,\beta,\gamma) = \beta + \gamma - \beta\gamma$$

- Benaming:

Dobbeltransitiviteit

Overzicht

1. Cykeltransitiviteit
   - Probabilistische relatie
   - Transitiviteit
   - Cykeltransitiviteit
2. Vergelijken van toevalsveranderlijken
   - Dobbelsteenmodel
   - Onafhankelijke toevalsveranderlijken
   - Afhankelijke toevalsveranderlijken
3. Dobbelspellen
   - Speldefinitie
   - Optimale strategieën

Het veralgemeende dobbelsteenmodel

- Voor collectie toevalsveranderlijken $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$:

$$q_{ij} = \mathrm{Prob}\{X_i > X_j\} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Prob}\{X_i = X_j\}$$

- Onafhankelijk en discreet:

$$q_{ij} = \textstyle\sum_{k>l} p_{X_i}(k) p_{X_j}(l) + \tfrac{1}{2} \sum_k p_{X_i}(k) p_{X_j}(k)$$

- Onafhankelijk en continu:

$$q_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_i}(x) \left(\int_{-\infty}^{x} f_{X_j}(y)\, dy \right) dx$$

Het veralgemeende dobbelsteenmodel

- Voor collectie toevalsveranderlijken $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$:

$$q_{ij} = \mathrm{Prob}\{X_i > X_j\} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Prob}\{X_i = X_j\}$$

- Onafhankelijk en discreet:

$$q_{ij} = \textstyle\sum_{k>l} p_{X_i}(k) p_{X_j}(l) + \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{k} p_{X_i}(k) p_{X_j}(k)$$

- Onafhankelijk en continu:

$$q_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_i}(x) \left(\int_{-\infty}^{x} f_{X_j}(y)\, dy \right) dx$$

Het veralgemeende dobbelsteenmodel

- Voor collectie toevalsveranderlijken $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$:

$$q_{ij} = \mathrm{Prob}\{X_i > X_j\} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Prob}\{X_i = X_j\}$$

- Onafhankelijk en discreet:

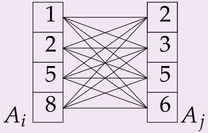
$$q_{ij} = \textstyle\sum_{k>l} p_{X_i}(k) p_{X_j}(l) + \tfrac{1}{2} \sum_k p_{X_i}(k) p_{X_j}(k)$$

- Onafhankelijk en continu:

$$q_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_i}(x) \left(\int_{-\infty}^{x} f_{X_j}(y)\, dy \right) dx$$

Discreet

- Voorbeeld:



$$q_{ij} = \frac{0+1+5+8}{32} = \frac{7}{16}$$

Transitiviteit

- Karakteristieke transitiviteit voor onafhankelijke toevalsveranderlijken:

Dobbeltransitiviteit

- Specifieke families onafhankelijke toevalsveranderlijken $\Rightarrow$ Sterkere vormen van transitiviteit
- . . . Enkele voorbeelden . . .

Transitiviteit

- Karakteristieke transitiviteit voor onafhankelijke toevalsveranderlijken:

Dobbeltransitiviteit

- Specifieke families onafhankelijke toevalsveranderlijken $\Rightarrow$ Sterkere vormen van transitiviteit
- ... Enkele voorbeelden ...

Transitiviteit specifieke modellen

- Exponentiële distributie: $f_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda (x - t_i)}$

isostochastische transitiviteit m.b.t. $g(x,y) = 1 - 2(1-x)(1-y)$

- Uniforme distributie: $f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & , x \in [a_i, a_i + \lambda] \\ 0 & , \text{elders} \end{cases}$

isostochastische transitiviteit m.b.t.
$g(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(\max(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} - 1, 0))^2$

Transitiviteit specifieke modellen

- Exponentiële distributie: $f_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda(x-t_i)}$

isostochastische transitiviteit m.b.t. $g(x,y) = 1 - 2(1-x)(1-y)$

- Uniforme distributie: $f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & , x \in [a_i, a_i + \lambda] \\ 0 & , \text{elders} \end{cases}$

isostochastische transitiviteit m.b.t.
$g(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(\max(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} - 1, 0))^2$

Transitiviteit specifieke modellen

- Exponentiële distributie: $f_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda(x-t_i)}$

isostochastische transitiviteit m.b.t. $g(x,y) = 1 - 2(1-x)(1-y)$

- Uniforme distributie: $f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & , x \in [a_i, a_i + \lambda] \\ 0 & , \text{elders} \end{cases}$

isostochastische transitiviteit m.b.t.
$g(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(\max(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} - 1, 0))^2$

Transitiviteit specifieke modellen

- Exponentiële distributie: $f_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda(x-t_i)}$

isostochastische transitiviteit m.b.t. $g(x,y) = 1 - 2(1-x)(1-y)$

- Uniforme distributie: $f_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & , x \in [a_i, a_i + \lambda] \\ 0 & , \text{elders} \end{cases}$

isostochastische transitiviteit m.b.t.

$$g(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(\max(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} - 1, 0))^2$$

Transitiviteit specifieke modellen

- Exponentiële distributie: $f_{X_i}(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}$
- Gumbel distributie: $f_{X_i}(x) = \mu e^{-\mu(x-\lambda_i)} e^{-e^{-\mu(x-\lambda_i)}}$
- Beta distributie: $f_{X_i}(x) = \lambda_i x^{(\lambda_i - 1)}$
- Pareto distributie: $f_{X_i}(x) = \lambda_i x^{-(\lambda_i + 1)}$

Multiplicatieve transitiviteit, of isostochastische transitiviteit m.b.t.

$$g(x,y) = \frac{x\,y}{x\,y + (1-x)(1-y)}$$

Transitiviteit specifieke modellen

- Exponentiële distributie: $f_{X_i}(x) = \lambda_i e^{-\lambda_i x}$
- Gumbel distributie: $f_{X_i}(x) = \mu e^{-\mu(x-\lambda_i)} e^{-e^{-\mu(x-\lambda_i)}}$
- Beta distributie: $f_{X_i}(x) = \lambda_i x^{(\lambda_i - 1)}$
- Pareto distributie: $f_{X_i}(x) = \lambda_i x^{-(\lambda_i + 1)}$

Multiplicatieve transitiviteit, of isostochastische transitiviteit m.b.t.
$$g(x, y) = \frac{x\,y}{x\,y + (1-x)(1-y)}$$

Overzicht

1. Cykeltransitiviteit
   - Probabilistische relatie
   - Transitiviteit
   - Cykeltransitiviteit
2. **Vergelijken van toevalsveranderlijken**
   - Dobbelsteenmodel
   - Onafhankelijke toevalsveranderlijken
   - **Afhankelijke toevalsveranderlijken**
3. Dobbelspellen
   - Speldefinitie
   - Optimale strategieën

Copula's

- Definitie: $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ is een copula indien:
  - Neutraal element 1
  - Absorberend element 0
  - 2-stijgend
- Voor elke bivariate distributiefunctie $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ bestaat er een copula C zodat

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

- Grenzen: $T_{\mathbf{L}} \leq C \leq T_{\mathbf{M}}$
- Onafhankelijke toevalsveranderlijken: $C = T_{\mathbf{P}}$

Copula's

- Definitie: $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ is een copula indien:
  - Neutraal element 1
  - Absorberend element 0
  - 2-stijgend
- Voor elke bivariate distributiefunctie $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ bestaat er een copula C zodat

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

- Grenzen: $T_{\mathbf{L}} \leq C \leq T_{\mathbf{M}}$
- Onafhankelijke toevalsveranderlijken: $C = T_{\mathbf{P}}$

Copula's

- Definitie: $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ is een copula indien:
  - Neutraal element 1
  - Absorberend element 0
  - 2-stijgend
- Voor elke bivariate distributiefunctie $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ bestaat er een copula C zodat

$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

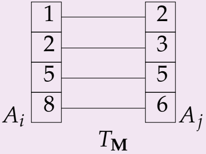
- Grenzen: $T_{\mathbf{L}} \le C \le T_{\mathbf{M}}$
- Onafhankelijke toevalsveranderlijken: $C = T_{\mathbf{P}}$

$C = T_{\mathbf{M}}$

- $A_i = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}, A_j = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$

$$q_{ij}^{\mathbf{M}} = \frac{\#\{k \mid i_k > j_k\}}{n} + \frac{\#\{k \mid i_k = j_k\}}{2n}$$

- Voorbeeld:



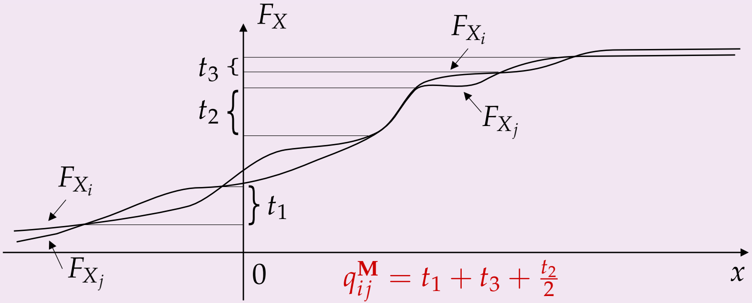
$$q_{ij}^{\mathbf{M}} = \frac{0+0+\frac{1}{2}+1}{4} = \frac{3}{8}$$

$C = T_{\mathbf{M}}$

- Continue toevalsveranderlijken:

$$q_{ij}^{\mathbf{M}} = \int_{x:F_{X_i}(x)<F_{X_j}(x)} f_{X_i}(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{x:F_{X_i}(x)=F_{X_j}(x)} f_{X_i}(x)\,dx$$

- Voorbeeld:

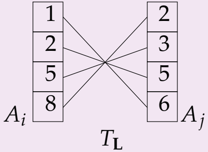


$C = T_{\mathbf{L}}$

- $A_i = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}, A_j = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$

$$q_{ij}^{\mathbf{L}} = \frac{\#\{k \mid i_k > j_{n-k+1}\}}{n} + \frac{\#\{k \mid i_k = j_{n-k+1}\}}{2n}$$

- Voorbeeld:



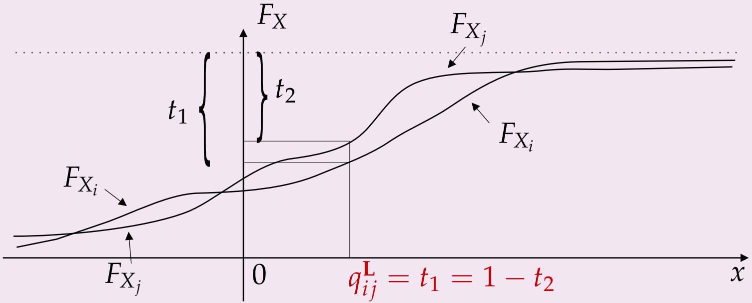
$$q_{ij}^{\mathbf{L}} = \frac{0+0+1+1}{4} = \frac{1}{2}$$

$C = T_{\mathbf{L}}$

- Continue toevalsveranderlijken:

$$q_{ij}^{\mathbf{L}} = \int_{x:F_{X_i}(x)+F_{X_j}(x)>1} f_{X_i}(x)\,dx$$

- Voorbeeld:



Karakteristieke transitiviteit

- $C = T_{\mathbf{P}}$:

Dobbeltransitiviteit

- $C = T_{\mathbf{M}}$:

$T_{\mathbf{L}}$-transitiviteit

- $C = T_{\mathbf{L}}$:

Partieel min-stochastische transitiviteit

Overzicht

1. Cykeltransitiviteit
   - Probabilistische relatie
   - Transitiviteit
   - Cykeltransitiviteit
2. Vergelijken van toevalsveranderlijken
   - Dobbelsteenmodel
   - Onafhankelijke toevalsveranderlijken
   - Afhankelijke toevalsveranderlijken
3. Dobbelspellen
   - Speldefinitie
   - Optimale strategieën

Speltheoretische concepten

- Niet-coöperatief spel: elke speler wilt individuele winst (opbrengst) maximaliseren
- Situatie: Wanneer alle spelers een strategie gekozen hebben
- Antagonistisch spel:
  - 2 spelers
  - In elke situatie: (opbrengst speler 1) $=-$(opbrengst speler 2)
- Opbrengstmatrix voor speler 1: $A=[a_{ij}]$ waarbij a_{ij} de opbrengst voor speler 1 in situatie (i,j) voorstelt

Speltheoretische concepten

- Niet-coöperatief spel: elke speler wilt individuele winst (opbrengst) maximaliseren
- Situatie: Wanneer alle spelers een strategie gekozen hebben
- Antagonistisch spel:
  - 2 spelers
  - In elke situatie:
    (opbrengst speler 1) $=-$(opbrengst speler 2)
- Opbrengstmatrix voor speler 1: $A=[a_{ij}]$ waarbij a_{ij} de opbrengst voor speler 1 in situatie (i,j) voorstelt

Speltheoretische concepten

- Niet-coöperatief spel: elke speler wilt individuele winst (opbrengst) maximaliseren
- Situatie: Wanneer alle spelers een strategie gekozen hebben
- Antagonistisch spel:
  - 2 spelers
  - In elke situatie:
    (opbrengst speler 1) $=-$(opbrengst speler 2)
- Opbrengstmatrix voor speler 1: $A=[a_{ij}]$ waarbij a_{ij} de opbrengst voor speler 1 in situatie (i,j) voorstelt

Speltheoretische concepten

- Niet-coöperatief spel: elke speler wilt individuele winst (opbrengst) maximaliseren
- Situatie: Wanneer alle spelers een strategie gekozen hebben
- Antagonistisch spel:
  - 2 spelers
  - In elke situatie:
    (opbrengst speler 1) $=$ $-$(opbrengst speler 2)
- Opbrengstmatrix voor speler 1: $A = [a_{ij}]$ waarbij a_{ij} de opbrengst voor speler 1 in situatie (i, j) voorstelt

Speltheoretische concepten

- Symmetrisch spel: antagonistisch spel waarbij geen van beide spelers a priori voordeel heeft: $a_{ij} = -a_{ji}$
- In ons geval geldt: $a_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{2}$

$$q_{ij} + q_{ji} = 1 \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$$

- Aanvaardbare situatie voor speler 1:
  de speler kan zijn opbrengst niet vergroten door een andere strategie te kiezen
- Zadelpunt: De situatie is aanvaardbaar voor beide spelers
- Optimale strategie: strategie die voorkomt in een zadelpunt
  - Opbrengst in een zadelpunt: 0 (geen winnaar, geen verliezer)

Speltheoretische concepten

- Symmetrisch spel: antagonistisch spel waarbij geen van beide spelers a priori voordeel heeft: $a_{ij} = -a_{ji}$
- In ons geval geldt: $a_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{2}$

$$q_{ij} + q_{ji} = 1 \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$$

- Aanvaardbare situatie voor speler 1:
  de speler kan zijn opbrengst niet vergroten door een andere strategie te kiezen
- Zadelpunt: De situatie is aanvaardbaar voor beide spelers
- Optimale strategie: strategie die voorkomt in een zadelpunt
  - Opbrengst in een zadelpunt: 0 (geen winnaar, geen verliezer)

Speltheoretische concepten

- Symmetrisch spel: antagonistisch spel waarbij geen van beide spelers a priori voordeel heeft: $a_{ij} = -a_{ji}$
- In ons geval geldt: $a_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{2}$

$$q_{ij} + q_{ji} = 1 \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$$

- Aanvaardbare situatie voor speler 1:
  de speler kan zijn opbrengst niet vergroten door een andere strategie te kiezen
- Zadelpunt: De situatie is aanvaardbaar voor beide spelers
- Optimale strategie: strategie die voorkomt in een zadelpunt
  - Opbrengst in een zadelpunt: 0 (geen winnaar, geen verliezer)

Speltheoretische concepten

- Symmetrisch spel: antagonistisch spel waarbij geen van beide spelers a priori voordeel heeft: $a_{ij} = -a_{ji}$
- In ons geval geldt: $a_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{2}$

$$q_{ij} + q_{ji} = 1 \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$$

- Aanvaardbare situatie voor speler 1:
  de speler kan zijn opbrengst niet vergroten door een andere strategie te kiezen
- Zadelpunt: De situatie is aanvaardbaar voor beide spelers
- Optimale strategie: strategie die voorkomt in een zadelpunt
  - Opbrengst in een zadelpunt: 0 (geen winnaar, geen verliezer)

Speltheoretische concepten

- Symmetrisch spel: antagonistisch spel waarbij geen van beide spelers a priori voordeel heeft: $a_{ij} = -a_{ji}$
- In ons geval geldt: $a_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{2}$

$$q_{ij} + q_{ji} = 1 \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}$$

- Aanvaardbare situatie voor speler 1:
  de speler kan zijn opbrengst niet vergroten door een andere strategie te kiezen
- Zadelpunt: De situatie is aanvaardbaar voor beide spelers
- Optimale strategie: strategie die voorkomt in een zadelpunt
  - Opbrengst in een zadelpunt: 0 (geen winnaar, geen verliezer)

Voorbeeld: Het $(6, 11)_{\mathbf{P}}$ spel

Opbrengstmatrix:

$$[a_{ij}] = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & -9 & -9 & -14 & -19 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & -5 & -9 & -13 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & -2 & -5 & -8 \\ 9 & 4 & 3 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 14 & 9 & 5 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 19 & 13 & 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Voorbeeld: Het $(6, 11)_{\mathbf{P}}$ spel

Aanvaardbare situatie voor speler 1:

$$[a_{ij}] = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & -9 & -9 & -14 & -19 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & -5 & -9 & -13 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & -2 & -5 & -8 \\ 9 & 4 & 3 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 14 & 9 & 5 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 19 & 13 & 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Speltheoretische concepten

Voorbeeld: Het $(6, 11)_{\mathbf{P}}$ spel

Aanvaardbare situatie voor speler 1:

$$[a_{ij}] = \frac{1}{36} \begin{array}{l} \quad \le 19 \\ \left(\begin{array}{rrrrrrr} 0 & -4 & -4 & -9 & -9 & -14 & -19 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & -5 & -9 & -13 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & -2 & -5 & -8 \\ 9 & 4 & 3 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 14 & 9 & 5 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 19 & 13 & 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Speltheoretische concepten

Voorbeeld: Het $(6, 11)_{\mathbf{P}}$ spel

Aanvaardbare situatie voor speler 1:

$$[a_{ij}] = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & -9 & -9 & -14 & -19 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & -5 & -9 & -13 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & -2 & -5 & -8 \\ 9 & 4 & 3 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 14 & 9 & 5 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 19 & 13 & 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\not\geq 19$$

Voorbeeld: Het $(6, 11)_{\mathbf{P}}$ spel

Zadelpunt:

$$[a_{ij}] = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & -9 & -9 & -14 & -19 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & -5 & -9 & -13 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & -2 & -5 & -8 \\ 9 & 4 & 3 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 14 & 9 & 5 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 19 & 13 & 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Speltheoretische concepten

Voorbeeld: Het $(6,11)_{\mathbf{P}}$ spel

Zadelpunt:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & & & & \leq 0 \end{array} \\
[a_{ij}] = \dfrac{1}{36} & \begin{pmatrix}
0 & -4 & -4 & -9 & -9 & -14 & -19 \\
4 & 0 & 0 & -4 & -5 & -9 & -13 \\
4 & 0 & 0 & -3 & -2 & -5 & -8 \\
9 & 4 & 3 & 0 & -1 & -4 & -7 \\
9 & 5 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\
14 & 9 & 5 & 4 & 1 & 0 & -1 \\
19 & 13 & 8 & 7 & 2 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Voorbeeld: Het $(6, 11)_{\mathbf{P}}$ spel

Zadelpunt:

$$[a_{ij}] = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & -9 & -9 & -14 & -19 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & -5 & -9 & -13 \\ 4 & 0 & 0 & -3 & -2 & -5 & -8 \\ 9 & 4 & 3 & 0 & -1 & -4 & -7 \\ 9 & 5 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 14 & 9 & 5 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 19 & 13 & 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

≥ 0

Spelbeschrijving

- Twee spelers met elk een dobbelsteen
- Elk schrijft, onafhankelijk, op elk vlak een strikt positief getal
- Beperking: De som van deze getallen wordt vastgelegd
  $\Rightarrow (n, \sigma)$ multisets $\pi = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$
  Dit zijn de strategieën voor beide spelers
- Onafhankelijke dobbelstenen $\Rightarrow T_{\mathbf{P}}$-copula, $(n, \sigma)_{\mathbf{P}}$ spel
- Andere copula's: $T_{\mathbf{M}}$ ($(n, \sigma)_{\mathbf{M}}$ spel) en $T_{\mathbf{L}}$ ($(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$ spel)

Spelbeschrijving

- Twee spelers met elk een dobbelsteen
- Elk schrijft, onafhankelijk, op elk vlak een strikt positief getal
- Beperking: De som van deze getallen wordt vastgelegd
  $\Rightarrow$ (n, σ) multisets $\pi = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$
  Dit zijn de strategieën voor beide spelers
- Onafhankelijke dobbelstenen $\Rightarrow$ $T_{\mathbf{P}}$-copula, $(n, \sigma)_{\mathbf{P}}$ spel
- Andere copula's: $T_{\mathbf{M}}$ ($(n, \sigma)_{\mathbf{M}}$ spel) en $T_{\mathbf{L}}$ ($(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$ spel)

Spelbeschrijving

- Twee spelers met elk een dobbelsteen
- Elk schrijft, onafhankelijk, op elk vlak een strikt positief getal
- Beperking: De som van deze getallen wordt vastgelegd
  $\Rightarrow$ (n, σ) multisets $\pi = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$
  Dit zijn de strategieën voor beide spelers
- Onafhankelijke dobbelstenen $\Rightarrow$ $T_{\mathbf{P}}$-copula, $(n, \sigma)_{\mathbf{P}}$ spel
- Andere copula's: $T_{\mathbf{M}}$ ($(n, \sigma)_{\mathbf{M}}$ spel) en $T_{\mathbf{L}}$ ($(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$ spel)

Spelbeschrijving

- Twee spelers met elk een dobbelsteen
- Elk schrijft, onafhankelijk, op elk vlak een strikt positief getal
- Beperking: De som van deze getallen wordt vastgelegd
  $\Rightarrow$ (n,σ) multisets $\pi = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$
  Dit zijn de strategieën voor beide spelers
- Onafhankelijke dobbelstenen $\Rightarrow$ $T_{\mathbf{P}}$-copula, $(n,\sigma)_{\mathbf{P}}$ spel
- Andere copula's: $T_{\mathbf{M}}$ ($(n,\sigma)_{\mathbf{M}}$ spel) en $T_{\mathbf{L}}$ ($(n,\sigma)_{\mathbf{L}}$ spel)

Spelbeschrijving

- Multipliciteitsvoorstelling van een (n, σ) multiset
$$\pi = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$$
wordt gegeven door $(1^{t_1} 2^{t_2} 3^{t_3} \ldots)$
- Voorbeeld:

$$\pi = \{4, 5, 5, 7, 7, 7, 8\} = (4^1 5^2 7^3 8^1)$$

- Cfr. partitietheory: een (n, σ) multiset is een partitie van σ in n delen.

Spelbeschrijving

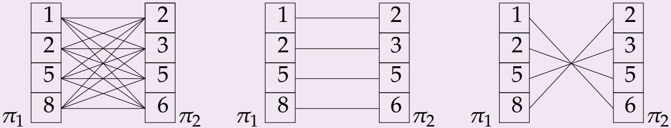
- Multipliciteitsvoorstelling van een (n, σ) multiset
$$\pi = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$$
wordt gegeven door $(1^{t_1} 2^{t_2} 3^{t_3} \ldots)$
- Voorbeeld:

$$\pi = \{4, 5, 5, 7, 7, 7, 8\} = (4^1 5^2 7^3 8^1)$$

- Cfr. partitietheory: een (n, σ) multiset is een partitie van σ in n delen.

Spelbeschrijving

Bepaling van a_{ij}:



$(n,\sigma)_{\mathbf{P}}$ $(n,\sigma)_{\mathbf{M}}$ $(n,\sigma)_{\mathbf{L}}$

$a_{12}^{\mathbf{P}} = -\frac{1}{16}$ $a_{12}^{\mathbf{M}} = -\frac{1}{8}$ $a_{12}^{\mathbf{L}} = 0$

Doelstelling:

Bepaling (n,σ) dobbelstenen die van geen enkele andere (n,σ) dobbelsteen verliezen

Overzicht

1. Cykeltransitiviteit
   - Probabilistische relatie
   - Transitiviteit
   - Cykeltransitiviteit
2. Vergelijken van toevalsveranderlijken
   - Dobbelsteenmodel
   - Onafhankelijke toevalsveranderlijken
   - Afhankelijke toevalsveranderlijken
3. **Dobbelspellen**
   - Speldefinitie
   - **Optimale strategieën**

De optimale strategieën voor $(n,\sigma)_{\mathbf{P}}$

- Een $(n,\sigma)_{\mathbf{P}}$ spel heeft een optimale strategie indien:
  - $n \leq 2$, of $(n,\sigma) = (3,7)$, of $(n,\sigma) = (3,8)$, of $(n,\sigma) = (2l, 4l+1)$ $(l > 1)$, of
  - $n > 2$ en er bestaan $a, b, k \in \mathbb{N}$ zodat

$$\begin{cases} n = (a+b)\,k - b \\ \sigma = n\,k \end{cases} \qquad \text{of} \qquad \begin{cases} n = (a+b)\,k \\ \sigma = (n+b)\,k \\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \end{cases}$$

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{P}}$

- Speciale gevallen:
  - Het $(1, \sigma)_{\mathbf{P}}$ spel: de unieke strategie (σ^1) is optimaal
  - Het $(2, \sigma)_{\mathbf{P}}$ spel: alle $\lfloor \frac{\sigma}{2} \rfloor$ strategieën zijn optimaal
  - Het $(3, 7)_{\mathbf{P}}$ spel: $(1^1 3^2)$ is de enige optimale strategie
  - Het $(3, 8)_{\mathbf{P}}$ spel: $(1^1 3^1 4^1)$ is de enige optimale strategie
  - Het $(n, n)_{\mathbf{P}}$ spel: de unieke strategie (1^n) is optimaal
  - Het $(2n, 4n+1)_{\mathbf{P}}$ spel: $(1^{n-1} 2^1 3^n)$ is de enige optimale strategie

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{P}}$

- Eerste generiek type:

  - Alle $(n, \sigma)_{\mathbf{P}}$ spellen, met $n \neq \sigma$, die voldoen aan

$$\begin{cases} n = (a+b)\,k - b \\ \sigma = n\,k \end{cases}$$

hebben exact $\lfloor a/(k-1) \rfloor + \lfloor b/k \rfloor + 1$ optimale strategieën

  - Optimale strategieën: $(1^a 2^b 3^a 4^b \ldots (2k-2)^b (2k-1)^a)$

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_\mathbf{P}$

- Voorbeeld: het $(6, 12)_\mathbf{P}$ spel

$$\begin{cases} 6 = (a+b)\,k - b \\ 12 = n\,k \end{cases}$$

- $a = 3$ en $b = 0$: $(1^3 3^3) = (1^3 2^0 3^3)$
- $a = 2$ en $b = 2$: $(1^2 2^2 3^2)$
- $a = 1$ en $b = 4$: $(1^1 2^4 3^1)$
- $a = 0$ en $b = 6$: $(2^6) = (1^0 2^6 3^0)$

$$\left\lfloor \frac{a}{k-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{k} \right\rfloor + 1 = 4$$

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{P}}$

- Tweede generiek type:

  - Alle $(n, \sigma)_{\mathbf{P}}$ spellen die voldoen aan

$$\begin{cases} n = (a+b)\,k \\ \sigma = (n+b)\,k \\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \end{cases}$$

hebben exact één optimale strategie

  - Optimale strategie: $(1^a 2^b 3^a 4^b \ldots (2k-1)^a (2k)^b)$

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_\mathbf{P}$

- Voorbeeld: het $(6, 21)_\mathbf{P}$ spel

$$\begin{cases} 6 = (a+b)\,k \\ 21 = (n+b)\,k \\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \end{cases}$$

Oplossing: $k = 3, a = 1, b = 1$

Optimale strategie: $(1^1 2^1 3^1 4^1 5^1 6^1)$, de standaard dobbelsteen

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{P}}$

- Gevolgen:
  - Voor eender welke n en σ heeft het diophantische stelsel

$$\begin{cases} n = (a+b)\,k - b \\ \sigma = n\,k \end{cases}$$

ofwel nul, ofwel $\lfloor a/(k-1) \rfloor + \lfloor b/k \rfloor + 1$ oplossingen

$\Rightarrow \lfloor a/(k-1) \rfloor + \lfloor b/k \rfloor$ is een invariant van het stelsel

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{P}}$

- Gevolgen:
  - Voor eender welke n en σ heeft het diophantische stelsel

$$\begin{cases} n = (a+b)\,k \\ \sigma = (n+b)\,k \\ a \neq 0 \wedge b \neq 0 \end{cases}$$

hoogstens één oplossing

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_\mathbf{M}$

- Opmerkelijk resultaat:

De enige optimale strategie in een $(n, \sigma)_\mathbf{M}$ spel, met $n \geq 3$, die een getal bevat dat strikt groter dan 5 is, is de $(3, 12)$ dobbelsteen $\{2, 4, 6\}$

De optimale strategieën voor $(n,\sigma)_{\mathbf{M}}$

- Een $(n,\sigma)_{\mathbf{M}}$ spel heeft een optimale strategie indien
  - $n \leq 2$, of
  - $(n,\sigma) = (3,12)$, of
  - $n > 2$ en er bestaan $t_1,\dots,t_5 \in \mathbb{N}$ zodat

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3+t_4+t_5 = n \\ t_3 > 0 \Rightarrow t_2+2 > (t_3-1)+t_4+t_5 \\ t_4 > 0 \Rightarrow t_3+2 > t_1+(t_4-1)+t_5 \\ t_5 > 0 \Rightarrow t_4+2 > t_1+t_2+(t_5-1) \end{cases}$$

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{M}}$

- Optimale strategieën:

  - Het $(1, \sigma)_{\mathbf{M}}$ spel: de unieke strategie (σ^1) is optimaal
  - Het $(2, \sigma)_{\mathbf{M}}$ spel: alle $\lfloor \frac{\sigma}{2} \rfloor$ strategieën zijn optimaal
  - Het $(3, 12)_{\mathbf{M}}$ spel: $(2^1 4^1 6^1)$ is de enige optimale strategie
  - $(1^{t_1} 2^{t_2} 3^{t_3} 4^{t_4} 5^{t_5})$, met $(t_1, \ldots, t_5)$ een oplossing van

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = n \\ t_3 > 0 \Rightarrow t_2 + 2 > (t_3 - 1) + t_4 + t_5 \\ t_4 > 0 \Rightarrow t_3 + 2 > t_1 + (t_4 - 1) + t_5 \\ t_5 > 0 \Rightarrow t_4 + 2 > t_1 + t_2 + (t_5 - 1) \end{cases}$$

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{M}}$

- Voorbeeld: het $(5, 16)_{\mathbf{M}}$ spel
  - 37 strategieën
  - Eén optimale strategie: $\{2, 2, 3, 4, 5\} = (2^2 3^1 4^1 5^1)$

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{M}}$

- Vervolg voorbeeld

  - Waarom is b.v. $\pi_1 = \{2, 2, 2, 4, 6\}$ niet optimaal?

$$
\begin{array}{c|c}
\pi_1 & \pi_1 \\
\hline
2 & 2 \\
2 & 2 \\
2 & 2 \\
4 & 4 \\
6 & 6
\end{array}
\quad \to \quad
\begin{array}{c|c}
\pi_1 & \pi_2' \\
\hline
2 & 2 \\
2 & 2 \\
\lceil 2 \rceil & 3 \\
4 & 4 \\
\lfloor 6 \rfloor & 5
\end{array}
\quad \to \quad
\begin{array}{c|c}
\pi_1 & \pi_2 \\
\hline
2 & 2 \\
\lceil 2 \rceil & 3 \\
2 & 3 \\
4 & 4 \\
\lfloor 6 \rfloor & 4
\end{array}
$$

$$q_{12} = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}\,.$$

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

- Interessant resultaat:

Alle $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$ spellen hebben minstens één optimale strategie

- Optimale strategieën: vier klasses
  - Eerste klasse: $\sigma - n \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
  - Optimale strategie:

$$\pi = (1^{c-1} 2^{n-c+1}), \text{ met } c = 2n + 1 - \sigma$$

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

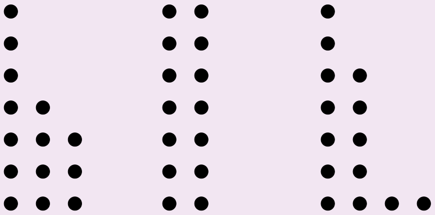
- Tweede klasse: $(n, \sigma) = (n, 2n),\ n \geq 1$
- Optimale strategieën:

$$\pi = (1^l 2^{(n-2l)} 3^l),\, l \in \{0, 1, \ldots, \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor\}$$

De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

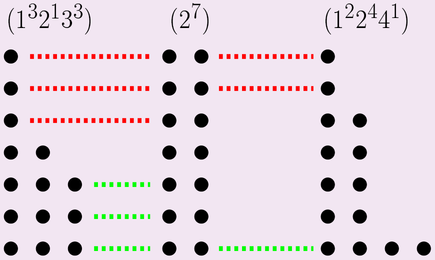
Het $(7, 14)_{\mathbf{L}}$ spel:

$(1^3 2^1 3^3)$ (2^7) $(1^2 2^4 4^1)$



De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

Het $(7, 14)_{\mathbf{L}}$ spel:



De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

- Derde klasse: $(n, \sigma) = (2l, \sigma),\ l > 0,\ \sigma \neq 4l,\ \sigma > 3l$

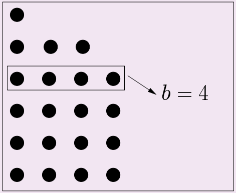
$$a = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + 1,\ b = \lfloor \tfrac{\sigma - n}{a} \rfloor + 1,\ c = n + 1 - \lfloor \tfrac{\sigma - n}{b - 1} \rfloor$$

- Optimale strategieën:

  - $i_c = b\ \wedge\ \sigma \neq l(b+2) + b - 1$, of
  - $i_{l+1} \geq b + 1$, of
  - $\pi = (1^{l-1} b^2 (b+1)^{l-1})$

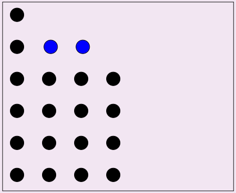
De optimale strategieën voor $(n,\sigma)_{\mathbf{L}}$

Voorbeeld: het $(6,20)_{\mathbf{L}}$ spel: 10 optimale strategieën



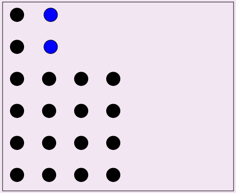
De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

Voorbeeld: het $(6, 20)_{\mathbf{L}}$ spel: 10 optimale strategieën



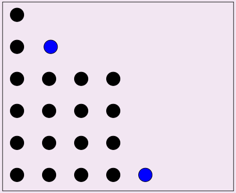
De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

Voorbeeld: het $(6, 20)_{\mathbf{L}}$ spel: 10 optimale strategieën



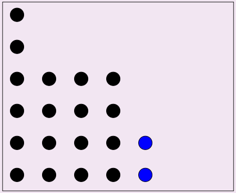
De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

Voorbeeld: het $(6, 20)_{\mathbf{L}}$ spel: 10 optimale strategieën



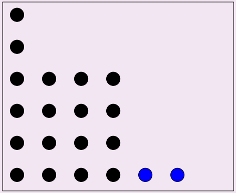
De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

Voorbeeld: het $(6, 20)_{\mathbf{L}}$ spel: 10 optimale strategieën



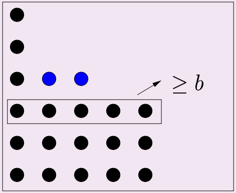
De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

Voorbeeld: het $(6, 20)_{\mathbf{L}}$ spel: 10 optimale strategieën



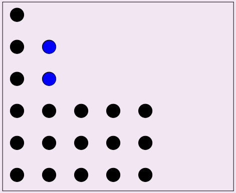
De optimale strategieën voor $(n,\sigma)_{\mathbf{L}}$

Voorbeeld: het $(6,20)_{\mathbf{L}}$ spel: 10 optimale strategieën



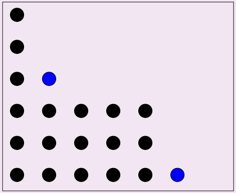
De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

Voorbeeld: het $(6, 20)_{\mathbf{L}}$ spel: 10 optimale strategieën



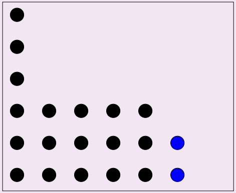
De optimale strategieën voor $(n,\sigma)_{\mathbf{L}}$

Voorbeeld: het $(6,20)_{\mathbf{L}}$ spel: 10 optimale strategieën



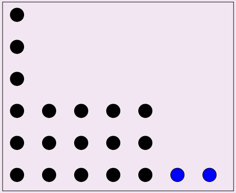
De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

Voorbeeld: het $(6, 20)_{\mathbf{L}}$ spel: 10 optimale strategieën



De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_\mathbf{L}$

Voorbeeld: het $(6, 20)_\mathbf{L}$ spel: 10 optimale strategieën



De optimale strategieën voor $(n,\sigma)_{\mathbf{L}}$

- Vierde klasse:
  $(n,\sigma) = (2l+1,\sigma),\ l \geq 0,\ \sigma \neq 2n,\ \sigma > 3l+1$ Laat

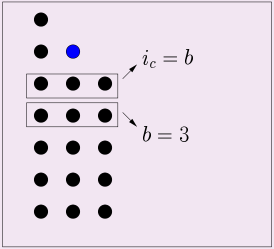
$$a = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + 1,\ b = \lfloor \tfrac{\sigma - n}{a} \rfloor + 1,\ c = n + 1 - \lfloor \tfrac{\sigma - n}{b-1} \rfloor$$

- Optimale strategieën:

  - $i_c = b$, of
  - $\pi = (1^l b^1 (b+1)^l)$

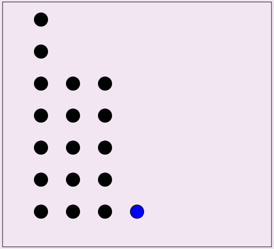
De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

Het $(7, 18)_{\mathbf{L}}$ spel: 2 optimale strategieën



De optimale strategieën voor $(n, \sigma)_{\mathbf{L}}$

Het $(7, 18)_{\mathbf{L}}$ spel: 2 optimale strategieën



... Bedankt voor uw aandacht ...